Олимпиадные задачи *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018 - 2019 уч. год)

5 класс

5.1. На доске написано число 3 728 954 106. Зачеркните в нем три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке образовали как можно меньшее число.

5.2. Если приписать к двузначному числу цифру 7 сначала слева, а потом справа, то разность полученных трехзначных чисел будет равна 351. Найдите двузначное число.

5.3. Пять винтиков, два шпунтика и три гаечки весят столько же, сколько весят один винтик, семь шпунтиков и четыре гаечки. Что тяжелее: винтик или шпунтик?

5.4. Митя, Сеня, Толя, Юра и Костя пошли на концерт и встали в очередь. Если бы Митя встал посередине очереди, то он оказался бы между Сеней и Костей, а если бы Митя встал в конец очереди, то рядом с ним мог быть Юра, но Митя встал впереди всех своих товарищей. Кто за кем стоит?

5.5. Как разрезать прямоугольник длиной в 18 см и шириной 8 см на наименьшее число прямоугольников и сложить из них квадрат?

Олимпиадные задачи *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018 - 2019 уч. год)

6 класс

6.1. Не выполняя деления, докажите, что $35 \cdot 125 + 28 \cdot 125 + 63 \cdot 554$ делится на 679.

6.2. Дети, построенные парами, выходят из лесу, где они собирали орехи. В каждой паре идут мальчик и девочка, причем у мальчика орехов либо вдвое больше, либо вдвое меньше, чем у девочки. Может ли так случиться, что у всех вместе 2018 орехов?

6.3. Внутренние покои султана состоят из одинаковых квадратных комнат, расположенных в виде квадрата 10×10. Если у двух комнат есть общая стена, то в ней обязательно есть ровно одна дверь. Сколько дверей во дворце?

6.4. У Винни Пуха в шкафу стояло несколько 11-литровых банок с медом (банки могли быть заполнены не целиком), Каждый день Винни Пух подходил к шкафу, брал какую-то банку и ел из нее мед. При этом если в банке было больше 1 л меда, то он съедал половину меда из банки, а если в банке оставался 1 л меда или меньше, то он доедал весь мед из этой банки. За 14 дней Винни Пух съел весь мед. Мог ли он съесть 30 л меда?

6.5. На столе стоят три одинаковых ящика, в одном находятся 2 черных шарика, в другом – 1 черный и 1 белый шарик, в третьем – 2 белых шарика. На ящиках написано: «2 белых», «2 черных», «черный и белый». При этом известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только 1 шарик, определить правильное расположение надписей?

Олимпиадные задачи *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018 - 2019 уч. год)

7 класс

7.1. Цифру 9, с которой начинается трехзначное число, перенесли в конец числа. В результате получилось число на 216 меньше данного. Какое число было первоначально?

7.2. На доске было записано арифметическое выражение, значение которого равнялось 2017, Вася поменял в этом выражении два знака действий местами, и значение выражения стало равно 2018. Покажите, как такое могло произойти.

7.3. Путешественник в первый день прошел 20 % всего пути и 2 км. Во второй – прошел 50 % остатка и еще 1 км. В третий день – 25 % оставшегося пути и еще 3 км. Остальные 18 км пути он прошел в четвертый день. Какова длина пути, пройденного путешественником?

7.4. Каждый из трех человек выписал 100 различных слов. После этого слова, встречающиеся не менее двух раз, вычеркнули. В результате у одного осталось 45 слов, у другого – 68, а у третьего – 54. Докажите, что по крайней мере одно слово выписали трое.

7.5. Каждый из трех мальчиков либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Им сообщили шесть натуральных чисел. После этого каждый из мальчиков сделал по два утверждения.

Петя: 1) Это шесть последовательных натуральных чисел. 2) Сумма этих чисел четна.

Вася: 1) Это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. 2) Коля – лжец.

Коля: 1) Все эти числа различны и делятся на 3. 2) Каждое из этих чисел меньше 20.

Какие числа сообщили мальчикам?

Олимпиадные задачи *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018 - 2019 уч. год)

8 класс

8.1. Выясните, делится ли на 3 число $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2017} + 2^{2018}$.

8.2. На доске написаны четыре числа. Разрешается выбрать любые два из них, прибавить к ним по единице и записать полученные числа вместо выбранных. Можно ли с помощью нескольких таких операций из числа 1, 9, 9, 4 получить четыре равных числа?

8.3. Набор, состоящий из чисел a, b, c, заменили на набор $a^4 - 2b^2, b^4 - 2c^2, c^4 - 2a^2$. В результате получившийся набор совпал с исходным. Найдите числа a, b, c, если их сумма равна –3.

8.4. Алиса и Белый Кролик в полдень вместе вышли из домика Кролика и пошли на прием к Герцогине. Пройдя полпути, Кролик вспомнил, что забыл перчатки и веер, и побежал за ними домой со скоростью, в 2 раза большей, чем он шел вместе с Алисой. Схватив перчатки и веер, он побежал к Герцогине (с той же скоростью, что бежал домой). В результате Алиса пришла к Герцогине вовремя, а Кролик опоздал на 10 мин. На какое время был назначен прием у Герцогини?

8.5. На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54 054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: «Кого в вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?» Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей, и 33 – что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов?

Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018 - 2019 уч. год)
9 класс

9.1. Можно ли разменять купюру в 50 рублей 15 монетами достоинством 1 и 5 рублей?

9.2. После возвращения цирка с гастролей знакомые расспрашивали дрессировщика Казимира Алмазова о «пассажирах» его автофургона: «Тигры были?» - «Да, причём их было в 7 раз больше, чем не тигров». – «А обезьяны?» - «Да, их было в 7 раз меньше, чем не обезьян». – «А львы были?» Ответьте за Казимира Алмазова. Ответ обоснуйте.

9.3. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.

9.4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе. На катете AC отмечена точка F, а на отрезке AD – точка E так, что $CD = DE$ и $FE \perp AB$. Найдите угол CBF.

9.5. Центр города представляет из себя квадрат 5×5 км, состоящий из 25 кварталов размером 1×1 км, границы которых – улицы, образующие 36 перекрестков. Какое наименьшее количество полицейских необходимо поставить на перекрестках так, чтобы о каждого из перекрестков какой-то из полицейских мог бы добраться, проехав на машине не более 2 км?

Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников
***по математике* (2018 - 2019 уч. год)**
10 класс

10.1. Найдите сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении: $(2 - 3x + x^2)^{2019} \cdot (2 + 3x + x^2)^{2018}$.

10.2. Найдите три квадратных трёхчлена, каждый из которых имеет два различных корня и произведение которых неотрицательно на всей числовой оси. Не забудьте обосновать правильность примера!

10.3. Стрелок 10 раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько было попаданий в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а попаданий ниже семерки и промахов не было.

10.4. Биссектрисы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что площади треугольника AIC и четырёхугольника $MINB$ равны. Докажите, что длины сторон треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию.

10.5. В пространстве даны 6 прямых. Каждая из них пересекается в точности с четырьмя из остальных, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что все данные прямые лежат в одной плоскости.

Олимпиадные задачи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018 - 2019 уч. год)

11 класс

11.1. Про число x известно, что оно является решением уравнения $x^4 - 2x^3 + 1 = 0$. Какие значения может принимать величина $x^3 - x^2 - x$?

11.2. «Как-то во время игры в шахматы у меня осталось фигур и пешек в 3 раза меньше, чем у соперника, и в 6 раз меньше, чем свободных клеток на доске, но я все равно выиграл эту партию!» - рассказывал однажды Федот Обормотов. Стоит ли ему верить?

11.3. Решите неравенство: $\cos x \geq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$.

11.4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Прямая l проходит через точку E, середину ребра C_1D_1, и пересекает прямые AD_1 и A_1B. Найдите расстояние от точки Е до точки пересечения прямой l с прямой A_1B.

11.5. На доске 6 × 6 некоторые клетки покрасили в один из двух цветов. Оказалось, что если *хромая* ладья идёт с любой незакрашенной клетки до любой другой незакрашенной клетки, то она обязательно пройдёт через клетки двух цветов. (*Хромая* ладья за один ход может перейти из клетки в соседнюю, имеющую с ней общую сторону.) Какое наибольшее количество незакрашенных клеток могло быть на доске?