Ответы и решения задач *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018-2019 уч. год), 5 класс

5.1. Ответ: цифры 3, 7, 9. Полученное число 2 854 106

5.2. Ответ: 38

Решение. 7ab – ab7 = 351, 7a8 – a87 = 351, 738 – 387 = 351.

5.3. Ответ: винтик тяжелее шпунтика.

Решение. Массу одного винтика, одного шпунтика и одной гаечки обозначим В, Ш и Г. Тогда верно равенство 5В + 2Ш + 3Г = В + 7Ш + 4Г, из которого следует, что верно равенство 4В = 5Ш + Г. Это означает, что 4В > 5Ш, но тогда 4В > 4Ш, то есть В > Ш.

5.4. Ответ: Митя, Толя, Сеня, Костя, Юра или Митя, Толя, Костя, Сеня, Юра. (наибольший балл выставляется за представленные оба ответа).

Решение. Так как если бы Митя встал в конец очереди, рядом с ним будет Юра, то Юра будет последним. Если бы Митя встал в середину очереди, то рядом с ним оказались бы Сеня и Костя, значит, Сеня и Костя стоят рядом: Костя за Сеней или Сеня за Костей. Перед ними стоит Толя (два мальчика перед Митей и два мальчика после Мити). А так как Митя стоит впереди очереди, то возможны два варианта.

5.5. Решение. Необходимо разрезать прямоугольник на три прямоугольника размерами 8×12, 4×6, 4×6, из которых и сложить квадрат размерами 12×12.

Ответы и решения задач *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018-2019 уч. год), 6 класс

6.1. Решение. $35\cdot125 + 28\cdot125 + 63\cdot554 = 125(35 + 28) + 63\cdot554 = 125\cdot63 + 63\cdot554 = 63(125+554) = 63\cdot679$. Один из множителей делится на 679, значит, и произведение делится на 679.

6.2. Ответ: не могло.

Решение. Заметим, что число орехов у каждой пары детей делится на 3. Это означает, что суммарное число орехов должно делиться на 3. Однако 2018 на 3 не делится.

6.3. Ответ: 180 дверей.

Решение. Всего комнат 100. Все комнаты, кроме тех, что находятся вдоль сторон квадрата, имеют по 4 общие стены, поэтому в них по 4 двери. Таких комнат 64. В угловых комнатах (их 4) – по 2 двери. И в оставшихся 32 комнатах, расположенных вдоль сторон квадрата, - по 3 двери. Учитывая, что дверь соединяет две комнаты, получим $(64\cdot4 + 4\cdot2 + 32\cdot3):2 = 180$.

6.4. Ответ: мог.

Решение. Заметим, что если в банке было ровно 8 л меда, то за 4 дня Винни Пух мог съесть весь мед из банки. Если же в банке было 11 л меда, то Винни Пух мог съесть весь мед из банки за 5 дней. Поэтому если у него изначально было две банки меда с 11 литрами и одна банка с 8 литрами (всего 30 литров), то он мог съесть весь мед за 14 дней ($5 + 5 + 4 = 14$).

6.5. Решение. Необходимо вынуть шарик из ящика с надписью «черный и белый». Если вынутый шарик окажется белым, значит, в этом ящике 2 белых, в ящике с надписью «2 белых» будет 2 черных, а с надписью «2 черных» будут черный и белый. Аналогично рассуждаем, если вынутый шарик – черный.

Ответы и решения задач *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018-2019 уч. год), 7 класс

7.1. Ответ: 975

Решение. Обозначим вторую и третью цифры трехзначного числа за x и y, тогда первоначальное число будет иметь вид $900 + 10x + y$. После переноса цифры 9 в конец числа число будет иметь вид: $100x + 10y + 9$. Учитывая, что разность чисел равна 216, после упрощения имеем $90x + 9y = 675$. Разделив обе части на 9, имеем $10x + y = 75$. Получим $x = 7$ и $y = 5$.

7.2. Решение. Например, $2013 + 1 \cdot 2 + 2 = 2017 \rightarrow 2013 + 1 + 2 \cdot 2 = 2018$.

7.3. Ответ: 75 км.

Решение. Если S км – весь путь путешественника, то в первый день он прошел (0,2S + 2) км, во второй – 0,4S км, в третий (0,1S + 2,5) км, в четвертый 18 км, поэтому 0,2S + 2 + 0,4S + 0,1S + 2,5 + 18 = S. Откуда находим S = 75.

7.4. Решение. Допустим, каждое вычеркнутое слово написали ровно два человека. Так как они оба его вычеркнули, то число вычеркнутых записей четно. Но первоначальное число записей, равное 300, четно. Поэтому должно быть четным и число оставшихся записей. Однако по условию 45 + 68 + 54 = 167 – нечетное число – противоречие.

7.5. Ответ: 3, 6, 9, 12, 15, 18.

Решение. Среди шести последовательных натуральных чисел ровно три нечетных. Поэтому их сумма нечетна. Значит, Петя солгал либо в первый раз, либо во второй, и поэтому он лжец, т.е. солгал оба раза. Но тогда лжец и Вася, потому что в первом своем высказывании он назвал шесть последовательных натуральных чисел. Так как Вася – лжец, то его высказывание, что Коля – лжец, ложно, и на самом деле Коля говорит правду. Есть только 6 различных натуральных чисел, делящихся на 3 и меньших 20, что и дает ответ.

Ответы и решения задач *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018-2019 уч. год), 8 класс

8.1. Ответ: не делится.

Решение. $1+2+2^2+\cdots+2^{2017}+2^{2018}=(1+2)+2^2(1+2)+\ \ldots\ +2^{2016}(1+2)+2^{2018}=3(1+2+2^2+\cdots+2^{2016})+\ 2^{2018}$

В данной сумме первое слагаемое делится на 3, а второе слагаемое не делится на 3. Поэтому сумма не делится на 3.

8.2. Ответ: нельзя.

Решение. После n операций из чисел 1, 9, 9, 4 получаются четыре числа, сумма которых равна $2n + 23$, т.е. нечетная. Если бы все эти числа были равны κ, то их сумма равнялась бы 4κ, т.е. была бы четной.

8.3. Решение. Из того, что наборы совпадают, следует совпадение их сумм. Значит, $a^4-2b^2+b^4-2c^2+c^4-2a^2=a+b+c=-3,\ (a^2-1)^2+(b^2-1)^2+(c^2-1)^2=0,$ откуда $a^2-1=b^2-1=c^2-1=0,$ т.е. $a=\pm1, b=\pm1, c=\pm1.$ Условию $a+b+c=-3$ удовлетворяют только $a=b=c=-1$. Осталось проверить, что найденная тройка удовлетворяет условиям задачи.

8.4. Ответ: прием был назначен на 12 ч 40 мин.

Первое решение. Поскольку Кролик бежал со скоростью, вдвое большей, чем скорость Алисы, то в то время, когда Алиса пришла к Герцогине, Кролик вновь был на середине пути. Так как он опоздал на 10 мин, то Алиса затратила на половину пути 20 мин, а на весь путь 40 мин.

Второе решение. Пусть время, за которое Алиса дошла от дома Кролика до дома Герцогини, равно t мин. Кролик прошел половину пути вместе с Алисой, на это у него ушло $\frac{t}{2}$ мин. Затем он пробежал расстояние, равное $\frac{3}{2}$ расстояния от своего дома до дома Герцогини. Так как он бежал в 2 раза быстрее, то ему понадобилось в 2 раза меньше времени, т.е. $\frac{3t}{4}$ мин. Итого, Кролик затратил на весь путь $\frac{5t}{4}$ мин. Кролик опоздал на 10 мин, значит $\frac{5t}{4}-t=10,\ t=40$ мин.

8.5. Ответ: 638 деревень.

Решение. Если в деревне рыцарей больше, чем лжецов, то, судя по ответам, в такой деревне 66 рыцарей и 33 лжеца. Если же рыцарей меньше, чем лжецов, то в деревне 33 рыцаря и 66 лжецов. Получаем уравнение относительно количества деревень, где рыцарей больше: $66k+(1000-k)\cdot 33=54054$. Отсюда находим, что $k=638$.

Ответы и решения задач *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018-2019 уч. год), 9 класс

9.1. Ответ: Нет, так как 15 нечетных слагаемых в сумме дают нечетное чисто, а 50 – четное число.

9.2. Ответ: львов не было. Решение: Поскольку тигров было в 7 раз больше, чем не тигров, то количество тигров составляет $\frac{7}{8}$ от общего количества всех животных. Поскольку обезьян было в 7 раз меньше, чем не обезьян, то количество обезьян составляет $\frac{1}{8}$ от общего количества всех животных. Так как $\frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1$, то животных, отличных от тигров и обезьян, в фургоне не было.

9.3. Решение: Пусть x_1 и x_2 – корни данного трехчлена. Тогда из теоремы Виета $a + b + 1 = -(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Из условия следует, что каждая скобка не равна 1, -1 или 0, т.е. число $a + b + 1$ составное.

9.4. Ответ: $\angle CBF = 45^\circ$. Решение. В четырёхугольнике $BCFE$ $\angle BCF = \angle BEF = 90^\circ$ (*рис.1*), следовательно, около него можно описать окружность. Тогда $\angle CBF = \angle CEF$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). В равнобедренном прямоугольном треугольнике CDE $\angle DEC = 45^\circ$, следовательно, $\angle CEF = 90^\circ - \angle DEC = 45^\circ = \angle CBF$.

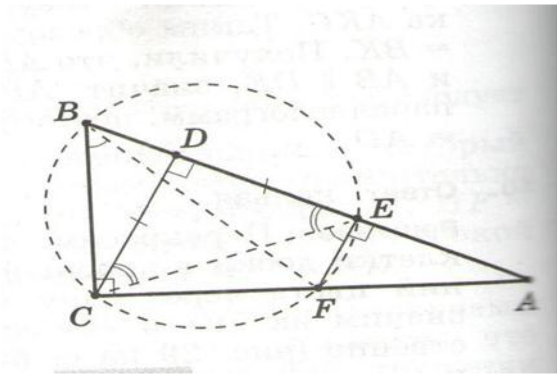

Рис. 1

9.5. Ответ: 4 полицейских. Рассмотрим угловой перекресток *A.* До него полицейский может добраться, если он находится на одном из 6 перекрестков, примыкающих к этому углу (рис. 2, *а*). Аналогичные рассуждения для трех оставшихся углов показывают, что для выполнения условия задачи необходимо наличие по крайней мере четырех полицейских. Осталось только привести пример расстановки четырех полицейских (рис. 2, *б*).

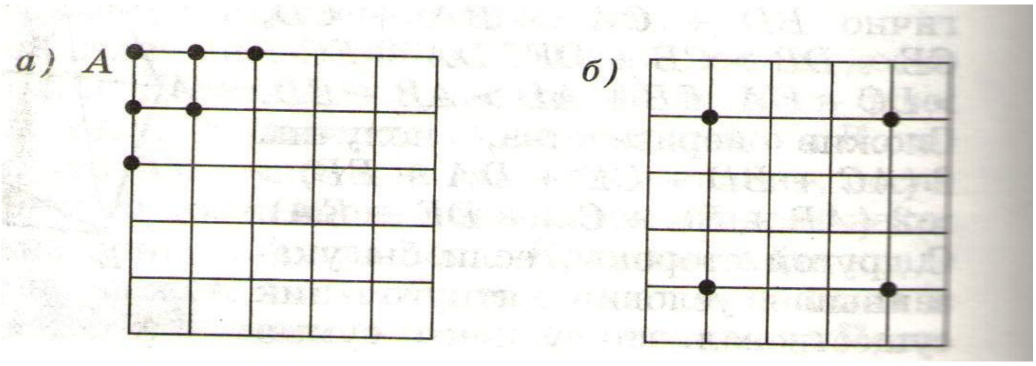

Рис. 2

Ответы и решения задач *муниципального этапа* Всероссийской олимпиады школьников *по математике* (2018-2019 уч. год), 10 класс

10.1. Ответ: 0. Подставим $x = 1$.

10.2. Решение: Например, $x^2 - 1$, $x^2 - x$ и $x^2 + x$ имеют по два различных корня. Их произведение, равное $x^2 (x - 1)^2 (x + 1)^2$, неотрицательно.

10.3. Решение: Так как стрелок выбил 90 очков и 40 из них набрал за четыре раза, то за оставшиеся шесть выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку, то за три выстрела (по одному в семерку, восьмерку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: 8 + 9 + 9 = 26. Таким образом, в семерку стрелок попал один раз, в восьмерку – два раза, а в девятку – три раза.

10.4. Решение: По условию $S_{\text{AIC}} = S_{\text{MINB}}$ (*рис. 1*). Прибавив к обеим частям этого равенства S_{CIM} , получаем $S_{\text{AMC}} = S_{\text{CNB}}$; с другой стороны, прибавляя к обеим частям этого же равенства S_{AIN}, получаем $S_{\text{AMB}} = S_{\text{ANC}}$. Значит, $\frac{\text{SAMC}}{\text{SAMB}} = \; = \frac{SCNB}{SANC}$. Поскольку точка M лежит на биссектрисе треугольника ABC, то она равноудалена от сторон AB и AC угла BAC, следовательно, в треугольниках ABM и ACM высоты из вершины M равны. Значит, $\frac{\text{SAMC}}{\text{SAMB}} = \frac{AC}{AB}$. Аналогично получаем $\frac{SCNB}{SANC} = \frac{BC}{AC}$. Итак имеем $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$, что и означает, что AB, AC, BC – геометрическая прогрессия.

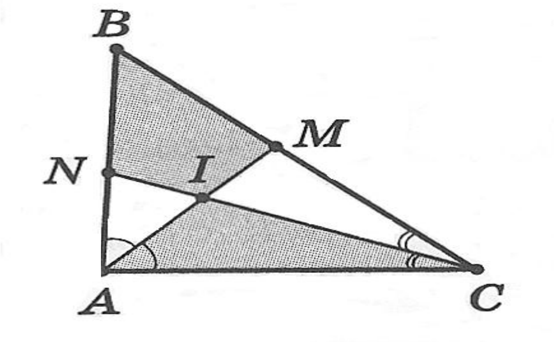

Рис. 1.

10.5. Решение: Пусть a – одна из данных прямых. По условию среди данных прямых есть единственная прямая b, не пересекающаяся с α. Пусть c – одна из четырёх оставшихся прямых. Кроме a и b, она пересекается ещё с какой-то прямой d из числа данных и потому лежит с ней в одной плоскости α. Но каждая из прямых a и b пресекаются как с c, так и с d, причём в различных точках. Стало быть, обе эти прямые a и b имеют с плоскостью α по две различные общие точки и потому лежат в ней. Осталось заметить, что каждая из двух оставшихся прямых e и f пересекается как с a, так и с b, причём в различных точках, и потому тоже лежат в плоскости α.

Ответы и решения задач ***муниципального этапа*** **Всероссийской олимпиады школьников** ***по математике*** **(2018-2019 уч. год), 11 класс**

11.1. Ответ: ±1. Решение: Проделаем следующие преобразования: $x^4 - 2x^3 + 1 = x^4 - x^3 - x^3 + 1 = (x - 1)(x^3 - x^2 - x - 1)$. Если x – корень исходного уравнения, то либо $x = 1$, либо выполнено равенство $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. В первом случае выражение $x^3 - x^2 - x$ равно -1, во втором оно равно 1.

11.2. Ответ: не стоит. Решение: Допустим, у Федота осталось k пешек и фигур. Если верить Федоту, в этот момент у его соперника пешек и фигур было $3k$, а пустых клеток на доске – $6k$. Но тогда получается, что всего на доске $k + 3k + 6k = 10k$ клеток, а на самом деле их там 64 – на 10 не делится.

11.3. Ответ: (0;1). Решение: Неравенство может иметь решения лишь в случае, если подкоренное выражение неотрицательно, то есть $y - x^2 - 1 \geq 0$. Из данного неравенства имеем $y \geq x^2 + 1$, значит, $y \geq 1$. Тогда $y^2 \geq 1$, и, учитывая, что $\cos x \geq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$, имеем $\cos x \geq 1$. Но поскольку по свойствам функции $y = \cos x$: $|\cos x| \leq 1$, то неравенство может иметь решения лишь в случае $\cos x = 1$. В то же время, так как $y^2 \geq 1$, а $\cos x \geq 1$, то $y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} = 1$, что возможно лишь в случае $y = 1$ и $y - x^2 - 1 = 0$. Отсюда имеем, что $x = 0$. *Ответ*: (0;1).

11.4. Ответ: $\frac{3}{2}$. Решение: Рассмотрим плоскость AD_1C_1B. Так как прямая l проходит через середину ребра C_1D_1 и пересекает прямую AD_1, она имеет с этой плоскостью две общие точки, а значит, целиком принадлежит этой плоскости. В то же время прямая A_1B лежит в плоскости AA_1B_1B. Поэтому точка пересечения прямых l и A_1B лежит на линии пересечения плоскостей AD_1C_1B и AA_1B_1B, т.е. на прямой AB. Но в то же время она принадлежит прямой A_1B, а значит, совпадает с точкой пересечения прямых l и A_1B, т.е. с точкой B. Итак, мы должны найти расстояние между точками E и B. Но это легко делается с помощью теоремы Пифагора: $BE = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.

11.5. Ответ: 8. Решение: Рассмотрим квадрат 3 × 3. Из любой клетки в его средней горизонтали можно добраться до любой клетки в его средней вертикали, пройдя по пути не более одной промежуточной клетки. Поэтому если в средней горизонтали квадрата 3 × 3 есть незакрашенная клетка, то в его средней вертикали незакрашенной клетки нет, и наоборот. Получается, что все незакрашенные клетки в квадрате 3 × 3 стоят либо в каких-то двух горизонталях, либо в каких-то двух вертикалях. Но в одной горизонтали или вертикали квадрата 3 × 3 не может быть больше одной незакрашенной клетки. Поэтому в квадрате 3 × 3 не больше двух незакрашенных клеток. Поскольку квадрат 6 × 6 разбивается на четыре квадрата 3 × 3, в нём не может быть больше 8 незакрашенных клеток. Пример, когда не закрашено ровно 8 клеток (он не единственный!) таков: сначала красим клетки доски в красный и синий цвета в шахматном порядке, а потом стираем раскраску у восьми клеток, указанных на рисунке 1.

	к	с		с	к
к	с	к	с	к	
с	к		к	с	к
	с	к	с	к	с
с	к	с		с	к
к		к	с	к	

Рис. 1.