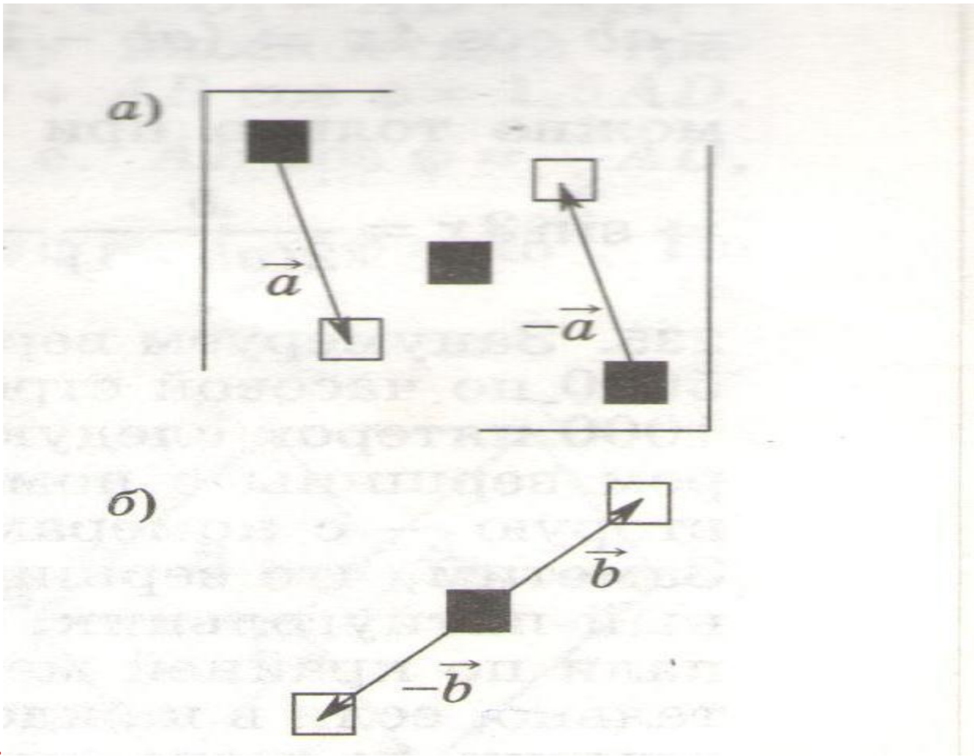
Ответы и решения *муниципального этапа* ВсОШ по математике
2019-2020 учебный год, 11 класс

11.1. Ответ: $a = 2$. Решение: По условию в точке пересечения $x^2 + ax + 1 = x^2 + x + a \Leftrightarrow (a - 1)(x - 1) = 0$, откуда $a = 1$ или $x = 1$. Но случай $a = 1$ невозможен, потому что тогда первые две параболы совпадали бы. Поэтому две первые параболы пересекаются в единственной точке с абсциссой 1 и ординатой $a + 2$. Подставляя эти значения в уравнение $y = x^2 + 3$, получаем $a = 2$. Легко видеть, что при $a = 2$ данные параболы различны.

11.2. Решение. Возведем обе части уравнений в квадрат и сложим, после упрощений получим уравнение $2 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + 1$, из которого получаем $a^2 = 1 + 2\cos(\alpha - \beta)$. Учитывая, что $\cos(\alpha - \beta) \leq 1$, получаем $a^2 \leq 3$. Значит, $a \leq \sqrt{3}$.

11.3. Решение. Для любой черной клетки, не лежащей в центре квадрата, и любой белой клетки существует симметричная им пара из черной и белой клеток. Сумма двух векторов, порожденных каждой из пар, равна нулю (рис. *а*). А для центральной клетки (она черного цвета) все выходящие из нее векторы разбиваются на пары с нулевой суммой, так как все белые клетки разбиваются на пары клеток, симметричных относительно центра квадрата (рис. б)



11.4. Решение: Пусть для определённости $S_{SA_1\ B_1}=S_{SB_1\ C_1}$. Из равенства площадей боковых граней имеем

$$S_{SAB} \cdot S_{SCD} = S_{SBC} \cdot S_{SAD} \text{, или}$$

$$SA \cdot SB \cdot \sin ASB \cdot SC \cdot SD \cdot \sin CSD =$$

$$SB \cdot SC \cdot \sin BSC \cdot SA \cdot SD \cdot \sin ASD \ .$$

Преобразуем равенство, сократив левую и правую части на $SA \cdot SB \cdot SC \cdot SD$. Получаем

$$\sin ASB \cdot \sin CSD = \sin BSC \cdot \sin ASD \ .$$

Умножив левую и правую части получившегося равенства на произведение $SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1 \cdot SD_1$, аналогично имеем

$$S_{SA_1\ B_1} \cdot S_{SC_1\ D_1} = S_{SB_1\ C_1} \cdot S_{SA_1\ D_1} \ . \qquad (*)$$

Если первые сомножители в равенстве (*) равны, то и вторые также равны, что и требовалось доказать.

11.5. Ответ: Второй игрой выигрывает, если m и n оба нечетны. Во всех остальных случаях выигрывает первый.

Решение. Рассмотрим разность координат королей: обозначим их через x и y. Заметим, что вначале $x = m - 1$, $y = n - 1$. Мы докажем, что в следующих позициях первый проигрывает, а во всех остальных выигрывает: а) $x = 0$ и y нечетно; б) $y = 0$ и x нечетно; в) $x \neq 0$, $y \neq 0$, x и y оба четны.

Во-первых, очевидно, что игрок не может из одной проигрышной позиции попасть в другую проигрышную позицию. Также необходимо показать, что из любой выигрышной позиции можно попасть в проигрышную. Нам необходимо рассмотреть два случая (без ограничения общности можно считать, что $x,\ y \geq 0$):

1) $x,\ y \geq 1$ – легко видеть, что правила позволяют уменьшать x или y на 1 независимо. Также очевидно, что мы можем или обе координаты сделать четными, или одну сделать нулем, а другую – нечетной;

2) $x = 0$ – мы просто уменьшаем y на 1;

3) $y = 0$ – аналогично предыдущему уменьшаем x на 1.

Итак, если первый игрок находится в выигрышной позиции, он и далее всегда может оставаться в выигрышной позиции. Если же он стоит на проигрышной позиции, второй игрок не даст ему занять выигрышную позицию. Так как расстояние между королями уменьшается, игра закончится, и из последней проигрышной позиции не может быть сделано никакого хода.