Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Мошокская средняя общеобразовательная школа»
Судогодского района Владимирской области

«Решение уравнений и неравенств с параметром»

Разработала: Гаврилова Г.В.
учитель математики
МБОУ «Мошокская средняя
общеобразовательная школа»

2018 год

Решение уравнений и неравенств с параметрами

Пояснительная записка

Понятие параметра является математическим понятием, которое часто используется в школьном курсе математики и в смежных дисциплинах.

7 класс - при изучении линейной функции и линейного уравнения с одной переменной.

8 класс – при изучении квадратных уравнений.

Общеобразовательная программа школьного курса математики не предусматривает решение задач с параметрами, а на вступительных экзаменах в вузы и на ЕГЭ по математике задачи с параметрами присутствуют, решение которых вызывает большие затруднения учащихся.Задачи с параметрами обладают диагностической и прогностической ценностью, которые позволяют проверить знания основных разделов школьного курса математики, уровень логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности.

Основная задача курса – познакомить учащихся с общими подходами решения заданий с параметрами, подготовить учащихся таким образом, чтобы они смогли в атмосфере конкурсного экзамена успешно справиться с задачами, содержащие параметры.

Решить уравнение, определить количество решений, исследовать уравнение, найти положительные корни, доказать, что неравенство не имеет решений и т.д.- все это варианты параметрических примеров. Поэтому невозможно дать универсальных указаний по решению примеров, в данном курсе рассматриваются различные примеры с решениями. Материал курса представлен по схеме: справочные сведения, примеры с решениями, примеры для самостоятельной работы, примеры для определения успешности усвоения материала.

Решение заданий с параметрами способствуют формированию навыков исследовательской деятельности, интеллектуальному развитию.

Цели курса:

- систематизировать знания учащихся, полученные в 7 и 8 классах, при решении линейных и квадратных уравнений и неравенств;
- выявить и развить их математические способности;
- создать целостное представление о решении линейных уравнений и неравенств, содержащих параметры;
- создать целостное представление о решении квадратных уравнений и неравенств, содержащих параметры;
- углубить знания по математике, предусматривающие формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету;
- обеспечить подготовку к профессиональной деятельности, требующей высокой математической культуры.

Учебно-тематический план

№ п/п	Тема	Кол-во часов	Виды деятельности
1.	Решение линейных уравнений и неравенств, квадратных уравнений и неравенств, решение задач на применение теоремы Виета.	2	Практикум
2.	Первоначальные сведения о задачах с параметром.	2	Семинар
3.	Решение линейных уравнений, содержащих параметры.	3	Исследовательская работа; отработка навыков; самостоятельная работа.
4.	Решение линейных неравенств, содержащих параметры.	3	Исследовательская работа; отработка навыков; самостоятельная работа.
5.	Квадратные уравнения. Теорема Виета.	3	Исследовательская работа; отработка навыков; самостоятельная работа.
6.	Успешность усвоения курса	1	Итоговая контрольная работа

Содержание программы

Тема 1. Решение линейных уравнений и неравенств, квадратных уравнений и неравенств, решение задач на применение теоремы Виета.

Тема 2. Первоначальные сведения о задачах с параметром.

Понятие параметра. Что означает «решить задачу с параметром»? Основные типы задач с параметром. Основные способы решения задач с параметром. Примеры решения линейных уравнений с параметром.

Тема 4. Решение линейных неравенств, содержащих параметры.

Примеры решения линейных неравенств с параметром.

Тема 5. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Примеры решения квадратных уравнений с параметром.

Дидактический материал к элективному курсу «Решение уравнений и неравенств с параметром»

Тема 1. Примеры для этой темы.

Тема 2. Примеры, где учащиеся уже встречались с параметрами:

- Функция прямая пропорциональность: $y = kx$ (x и y – переменные; k – параметр, $k \neq 0$);
- Функция обратной пропорциональности: $y = {}^{k}/_{x}$ (x и y – переменные, k – параметр, $k \neq 0$)
- Линейная функция: $y = kx + b$ (x и y – переменные; k и b – параметры);
- Линейное уравнение: $ax + b = 0$ (x – переменная; a и b – параметры);
- Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (x – переменная; a, b и c – параметры, $a \neq 0$).

Что такое параметр?

Если в уравнение или неравенство некоторые коэффициенты заменены не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются параметрами, а уравнение или неравенство параметрическим.

Параметры обычно обозначаются первыми буквами латинского алфавита: а, в, с, … или a_1, a_2, a_3, … , а неизвестные последними буквами латинского

алфавита x, y, z, … Эти обозначения не являются обязательными, но если в условии не указано, какие буквы являются параметрами, а какие – неизвестными, то используются такие обозначения.

Например, решить уравнение $(4x - ax)a = 6x - 10$. Здесь x – неизвестное, a – параметр.

Что означает «решить задачу с параметром»?

Решить задачу с параметром – значит, для каждого значения параметра a найти значение x, удовлетворяющие этой задаче, т.е. это зависит от вопроса в задаче.

Решить уравнение или неравенство с параметрами означает:

- определить, при каких значениях параметров существует решения;
- для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующее множество решений.

Какие основные типы задач с параметром?

Тип 1. Уравнения, неравенства, которые необходимо решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговорённому множеству. Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами».

Тип 2. Уравнения, неравенства, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра.

Тип 3. Уравнения, неравенства, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения и неравенства имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений). Задачи типа 3 в каком-то смысле обратные задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения, неравенства, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;

2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решения второго уравнения и т.д.

Основные способы решения задач с параметром.

Способ 1. (аналитический) Этот способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные способы нахождения ответа в задачах без параметра.

Способ 2. (графический) В зависимости от задачи рассматриваются графики в координатной плоскости (x;y), или в координатной плоскости (x;a).

Способ 3. (решение относительно параметра) При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными, и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признаётся более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

Замечание. Существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы «ветвится» в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа – это сбор раннее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения.

Рассмотрим примеры. 2.1. Сравнить -a и 5a.

Решение. Надо рассмотреть три случая: если $a < 0$, то $-a > 5a$;

если $a = 0$, то $-a = 5a$;

если $a > 0$, то $-a < 5a$..

Ответ. При $a < 0$, $-a > 5a$; при $a = 0$, $-a = 5a$; при $a > 0$, $-a < 5a$.

2.2. Решить уравнение $ax = 1$.

Решение. Если $a = 0$, то уравнение не имеет решений.

Если $a \neq 0$, то $x = {}^{1}/_{a}$.

Ответ. При $a = 0$ нет решений; при $a \neq 0$, $x = {}^{1}/_{a}$.

2.3. Сравнить c и – 7c.

2.4. Решить уравнение $cx = 10$

Тема 3.

Линейные уравнения

Уравнения вида

$$ax = в, \qquad (1)$$

где а, в – принадлежат множеству действительных чисел, а x – неизвестное, называется линейным уравнением относительно x.

Схема исследования линейного уравнения (1).

1.Если $a \neq 0$, в – любое действительное число. Уравнение имеет единственное решение $x = в/a$.

2. Если a=0, в=0, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, решением уравнения будет множество всех действительных чисел.

3. Если a=0, $в \neq 0$, то уравнение $0 \cdot x = в$ не имеет решений .

Замечание. Если линейное уравнение не представлено в виде (1), то сначала нужно привести его к виду (1) и только после этого проводить исследование.

Примеры. 3.1 Решить уравнение $(a -3)x = в+2a$

Уравнение записано в виде (1).

Решение: Если $a \neq 3$, то уравнение имеет решение $x = в+2a/ a-3$ при любом в. Значит единственное значение а, при котором могут отсутствовать решения уравнения, это a=3. В этом случае уравнение $(a -3)x = в+2a$ принимает вид $0 \cdot x = в+6$. (2)

Если $в \neq - 6$, то уравнение (2) не имеет решений.

Если в = - 6, то любое x является решением (2).

Следовательно, в = - 6 единственное значение параметра в, при котором уравнение (1) имеет решение при любом а (x=2 при $a \neq 3$ и x принадлежит множеству действительных чисел при a=3).

Ответ: в = -6.

3.2. Решить уравнение $3(x-2a) = 4(1-x)$.

3.3. Решить уравнение $3/kx-12=1/3x-k$

3.4. Решить уравнение $(a^2-1)x = a^2 – a -2$

3.5. Решить уравнение $x^2 + (2a +4)x +8a+1=0$

Самостоятельная работа.

Вариант 1. Решить уравнения: а) $вx + 2 = - 1$;

б) $(a – 1)x = a – 2$;

в) $(a^2 – 1)x – a^2 + 2a – 1 = 0$.

Вариант 2. Решить уравнения: а) $– 8 = вx + 1$;

б) $(a + 1)x = a – 1$;

в) $(9a^2 – 4)x – 9a^2 + 12a – 4 = 0$.

Тема 4.

Линейные неравенства с параметром

Неравенства

$$ax > в,\ \ ax < в,\ \ ax \geq в,\ \ ax \leq в,$$

где а, в – выражения, зависящие от параметров, а x – неизвестное, *называются линейными неравенствами с параметрами.*

Решить неравенство с параметрами – значит для всех значений параметров найти множество решений неравенства.

Схема решения неравенства $ax > в$.

1. Если $a > 0$, то $x > в/a$.
2. Если $a < 0$, то $x < {}^{В}/a$.
3. Если $a = 0$, то неравенство примет вид $0 \cdot x > в$. При $в \geq 0$ неравенство не имеет решений; при $в < 0$ решением неравенства будет множество всех чисел.

Схемы для решения остальных неравенств учащиеся делают самостоятельно.

Примеры. 4.1. Решить неравенство $a(3x-1)>3x – 2$.

Решение: $a(3x-1)>3x – 2$, значит $3x(a-1)> a-2$.

Рассмотрим три случая.

1. a=1, решением $0 \cdot x > -1$ является любое действительное число.
2. a>1, 3x(a-1)> a-2, значит x > a-2/3 (a-1).
3. a< 1, 3x(a-1)> a-2, значит x < a-2/3 (a-1).

Ответ: x > a-2/3 (a-1) при a>1; x < a-2/3 (a-1) при a< 1; x принадлежит множеству действительных чисел при a=1.

Решить неравенства. 4.2. $(a - 1)x > a^2 - 1$.

4.3. $2ax + 5 > a + 10x$.

4.4. $(a + 1)x - 3a + 1 \leq 0$.

4.5. $X^2 + ax + 1 > 0$.

Самостоятельная работа.

Вариант 1. Решить неравенства: а) $(a - 1)x \leq a^2 - 1$;

б) 3x-a > ax – 2.

Вариант 2. Решить неравенства: а) $(a - 1)x - 2a + 3 \geq 0$;

б) ax-2в< вx+2a.

Тема 5.

Квадратные уравнения, содержащие параметры. Теорема Виета.

Уравнение вида

$$ax^2 + вx + c = 0, \qquad (1)$$

где a,в,c – выражения, зависящие от параметров, $a \neq 0$, x – неизвестное, называется квадратным уравнением с параметрами.

Схема исследования квадратного уравнения (1).

1. Если a = 0, то имеем линейное уравнение вx +c = 0.
2. Если $a \neq 0$ и дискриминант уравнения $D = в^2 - 4ac < 0$, то уравнение не имеет решений .
3. Если $a \neq 0$ и D = 0, то уравнение имеет единственное решение $x = -в/_{2a}$ или как еще говорят, совпадающие корни $x_1 = x_2 = -{}^{B}/_{2a}$.
4. Если $a \neq 0$ и D > 0, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = {}^{(-B \pm \sqrt{D})}/_{2a}$

Примеры. 5.1. Для всех значений параметра а решить уравнение

$$(a - 1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0.$$

Решение. 1. $a - 1 = 0$, т.е. $a = 1$.Тогда уравнение примет вид $-2x + 3 = 0$, $x = {}^3/_2$.

2. $a \neq 1$. Найдём дискриминант уравнения $D = 4a^2 - 4(a - 1)(a + 2) = -4a + 8$.

Возможны случаи: а) $D < 0$, т. е. $-4a + 8 < 0$, $4a > 8$, $a > 2$. Уравнение не имеет корней.

б) $D = 0$, т.е. $-4a + 8 = 0$, $4a = 8$, $a = 2$. Уравнение имеет один корень $x = {}^a/_{(a-1)} = {}^2/_{(2-1)} = 2$.

в) $D > 0$, т.е. $-4a + 8 > 0$, $4a < 8$, $a < 2$. Уравнение имеет два корня $x_{1,2} = {}^{(2a \pm \sqrt{-4a+8})}/_{2(a-1)} = {}^{(a \pm \sqrt{2-a})}/_{(a-1)}$

Ответ. При $a = 1$ $x = {}^3/_2$;

при $a = 2$ $x = 2$;

при $a > 2$ нет корней;

при $a < 2$ и $a \neq 1$ $x_{1,2} = {}^{(a \pm \sqrt{2-a})}/_{(a-1)}$.

Для всех значений параметра решить уравнения:

5.2. $ax^2 + 3ax - a - 2 = 0$;

5.3. $ax^2 + 6x - 6 = 0$;

5.4. $вx^2 - (в + 1)x + 1 = 0$;

5.5. $(в + 1)x^2 - 2x + 1 - в = 0$.

Самостоятельная работа.

Вариант 1. Решить уравнение $ax^2 - (a+3)x + 3 = 0$.

Вариант 2. Решить уравнение $a^2 + (a+1)x + 2a - 4 = 0$.

Задачи.

5.6. Найдите все значения параметра а, для которых квадратное уравнение $(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + 4a + 3 = 0$ имеет два различных корня; не имеет корней; имеет один корень.

Решение. Данное уравнение по условию является квадратным, значит, $a - 1 \neq 0$, т.е. $a \neq 1$. Найдём дискриминант $D = 4(2a + 1)^2 - 4(a - 1)(4a + 3) =$

$= 4(4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + a + 3) = 4(5a + 4)$.

Имеем: 1) При $a \neq 1$ и $D > 0$, т.е. $4(5a + 4) > 0$, $a > -{}^4/_5$ уравнение имеет два различных корня.

2) При $a \neq 1$ и $D < 0$, т.е. $a < -{}^4/_5$ уравнение не имеет корней.

3) При $a \neq 1$ и $D = 0$, т.е. $a = -{}^4/_5$ уравнение имеет один корень.

Ответ. Если $a > -{}^4/_5$ и $a \neq 1$, то уравнение имеет два различных корня;

если $a < -{}^4/_5$, то уравнение не имеет корней;

если $a = -{}^4/_5$, то уравнение имеет один корень.

5.7.При каких значениях параметра а уравнение $(a + 6)x^2 + 2ax + 1 = 0$ имеет единственное решение?

5.8.При каких значениях параметра а уравнение $(a^2 - a - 2)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ не имеет решений?

5.9.При каких значениях параметра а уравнение $ax^2 - (2a+3)x + a + 5 = 0$ имеет два различных корня?

Самостоятельная работа.

Вариант 1. Найдите все значения параметра *a*, для которых квадратное уравнение $(2a - 1)x^2 + 2x - 1 = 0$ имеет два различных корня; не имеет корней; имеет один корень.

Вариант 2. . Найдите все значения параметра а, для которых квадратное уравнение $(1 - a)x^2 + 4x - 3 = 0$ имеет два различных корня; не имеет корней; имеет один корень.

Теорема Виета.

При решении многих задач, связанных с квадратными уравнениями, содержащими параметры, используются следующие теоремы.

Теорема Виета. Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, то $x_1 + x_2 = -{}^B/a$ и $x_1 \cdot x_2 = {}^C/a$.

Теорема 1. Для того, чтобы корни квадратного трёхчлена $ax^2 + вx + c$ были действительны и имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: $D = в^2 - 4ac \geq 0$, $x_1 \cdot x_2 = {}^{C}/_{A} > 0$.

При этом оба корня будут положительны, если $x_1 + x_2 = -{}^{B}/a > 0$, и оба корня будут отрицательны, если $x_1 + x_2 = -{}^{B}/a < 0$.

Теорема 2. Для того, чтобы корни квадратного трёхчлена $ax^2 + вx + c$ были действительны и оба неотрицательны или оба неположительные, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: $D = в^2 - 4ac \geq 0$, $x_1 \cdot x_2 = {}^{C}/a \geq 0$.

При этом оба корня будут неотрицательны, если $x_1 + x_2 = -{}^{B}/a \geq 0$, и оба корня будут неположительные, если $x_1 + x_2 = -{}^{B}/a \leq 0$.

Теорема 3. Для того, чтобы корни квадратного трёхчлена $ax^2 + вx + c$ были действительны и имели разные знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих условия: $x_1 \cdot x_2 = {}^{C}/a < 0$.

При этом условие $D = в^2 - 4ac > 0$ выполняется автоматически.

Примечание. Эти теоремы играют важную роль при решении задач, связанных с исследованием знаков корней уравнения $ax^2 + вx + c = 0$.

Полезные равенства: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, (1)

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2)$, (2)

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$, (3)

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}. \quad (5)$$

5.10. При каких значениях параметра а квадратное уравнение $(a - 1)x^2 - 2ax + a + 1 = 0$ имеет: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) корни разных знаков?

Решение. Уравнение квадратное, значит, $a \neq 1$. По теореме Виета имеем

$$x_1 + x_2 = {}^{2a}/(a_{-1}), \quad x_1x_2 = {}^{(a+1)}/_{(a-1)}.$$

Вычислим дискриминант $D = 4a^2 - 4(a - 1)(a + 1) = 4$.

а) Согласно теоремы 1 уравнение имеет положительные корни, если

$D \geq 0$, $x_1x_2 > 0$, $x_1 + x_2 > 0$, т.е. $^{(a+1)}/_{(a-1)} > 0$, $^{2a}/_{(a-1)} > 0$.

Отсюда а є (-1; 0).

б) Согласно теоремы 1 уравнение имеет отрицательные корни, если

$D \geq 0$, $x_1x_2 > 0$, $x_1 + x_2 < 0$, т.е. $^{(a+1)}/_{(a-1)} > 0$, $^{2a}/_{(a-1)} < 0$.

Отсюда а є (0; 1).

в) Согласно теоремы 3 уравнение имеет корни разных знаков, если $x_1x_2 < 0$,т.е. $^{(a+1)}/(a_{-1)} < 0$. Отсюда а є (-1; 1).

Ответ. а) при а є (-1; 0) уравнение имеет положительные корни;

б) при а є (0; 1) уравнение имеет отрицательные корни;

в) при а є (-1; 1) уравнение имеет корни разных знаков.

5.11. При каких значениях параметра а квадратное уравнение $(a - 1)x^2 - 2(a +1)x + a +3 = 0$ имеет: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) корни разных знаков?

5.12. Не решая уравнения $3x^2 - (в + 1)x - 3в^2 +0$, найдите $x_1^{-1} + x_2^{-1}$, где x_1, x_2 – корни уравнения.

5.13. При каких значениях параметра а уравнение $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 = 0$ имеет корни, сумма квадратов которых равна 4.

Контрольная работа.

Вариант 1. 1. Решить уравнение $(a^2 + 4a)x = 2a + 8$.

2. Решить неравенство $(в + 1)x \geq (в^2 - 1)$.

3. При каких значениях параметра а уравнение

$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 6 = 0$ имеет: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) корни разных знаков?

Вариант 2. 1. Решить уравнение $(a^2 - 2a)x = 3a$.

2. Решить неравенство $(a + 2)x \leq a^2 - 4$.

3. При каких значениях параметра в уравнение

$x^2 - (2в - 1)x + в^2 - т - 2 = 0$ имеет: а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) корни разных знаков?

Литература.

1. В.В. Мочалов, В.В. Сильвестров. Уравнения и неравенства с параметрами. Ч.:Изд-во ЧГУ, 2004. – 175с.
2. Ястребинский Г.А. Задачи с параметрами. М.: Просвещение, 1986, - 128 с.
3. Башмаков М.И. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 – 11 классов среднй школы. М.: Просвещение, 1991. – 351 с.
4. Т. Пескова. Первое знакомство с параметрами в уравнениях. Учебно-методическая газета «Математика». №36, 1999.
5. Т. Косякова. Решение линейных и квадратных неравенств, содержащих параметры. 9 кл. Учебно-методическая газета «Математика».№ 25 – 26, № 27 – 28. 2004.
6. Т. Горшенина. Задачи с параметром. 8 кл. Учебно-методическая газета «Математика». №16. 2004.
7. Ш. Цыганов. Квадратные трёхчлены и параметры. Учебно-методическая газета «Математика». №5. 1999.
8. С. Неделяева. Особенности решения задач с параметром. Учебно-методическая газета «Математика». №34. 1999.
9. В.В. Локоть Задачи с параметрами. Линейные и квадратные уравнения, неравенства, системы. Учебно-методическое пособие .Москва 2005.